

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений



УТВЕРЖДАЮ

проректор

*П.А. Машаров*

« 29 »  
МП

П.А. Машаров  
марта 2024 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Увеличенная группа направлений  
подготовки  
Программа высшего образования  
Направление подготовки  
Профиль подготовки  
Квалификация  
Форма обучения

01.00.00 Математика и механика  
Программа бакалавриата  
01.03.01 Математика  
Математика  
Бакалавр  
Очная

Рабочая программа адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2024

Рабочая программа дисциплины «Избранные вопросы теории функций» для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль подготовки: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2024 года.

Разработчик:  
профессор кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений  
доктор физ.-мат. наук, профессор



В.В. Волчков

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.  
Протокол от 26.03.2024 г. № 10



В.В. Волчков

Заведующий кафедрой

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
28.03.2024 г.



И.А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 27.03.2024 г. № 3.  
Председатель



Л. И. Селякова

Руководитель основной профессиональной  
образовательной программы,  
д-р физ.-мат. наук, зав. каф. МАиДУ, проф.  
26.03.2024 г.



В.В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Комплексный анализ, Функциональный анализ.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Гармонический анализ, Интегральные преобразования, Современные проблемы математики, Производственная практика: научно-исследовательская работа, Производственная практика: преддипломная практика, Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ОД.17 Избранные вопросы теории функций
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор вуза
Количество зачетных единиц/ всего часов	3 /108

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	4	8	20	–	40	48	108	экзамен

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Формирование научного мировоззрения; овладение новым математическим аппаратом; углубление и применение знаний, полученных в общих курсах; подготовка к профессиональной деятельности; подготовка к чтению специальной литературы.

## 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Компетенции

ПК-3. Способен осуществлять преподавание по дополнительным общеобразовательным программам.

### 4.2. Индикаторы компетенций

ПК-3.6. Разрабатывает программы и реализует преподавание разделов математики, связанных с функциями и их свойствами, в рамках дополнительного образования.

#### 4.3. Результаты обучения

ПК-3.6.1. Знает определения и утверждения, приёмы доказательства утверждений, методы решения задач, связанных с теорией периодических в среднем функций.

ПК-3.6.2. Умеет выбирать и использовать необходимые математические методы и вычислительные средства, решать задачи дисциплины (находить разложения функций в ряды Фурье по гармоникам, решать интегральные уравнения типа Абеля, производить преобразования со специальными функциями).

ПК-3.6.3. Владеет методами теории специальных функций, методами группового анализа, методами исследования структуры решений уравнений свертки.

### 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Некоторые специальные функции	1.1. Г-функция 1.2. В-функция 1.3. Цилиндрические функции
Раздел 2. Функции с нулевыми интегралами по кругам	2.1. Примеры и простейшие свойства 2.2. Множества единственности и описание класса $V_r$ 2.3. Теоремы о двух радиусах и свойство Лиувилля
Раздел 3. Функции с нулевыми интегралами по квадратам	3.1. Квадрат как множество Помпейю 3.2. Задача трёх квадратов 3.3. Локальная теорема о квадрате
Раздел 4. Приложения к вопросам анализа	4.1. Теоремы типа Мореры 4.2. Усиление теоремы Дзядыка 4.3. Аппроксимация индикаторами

### 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

#### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 4, семестр – 8

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Некоторые специальные функции	<b>3</b>		<b>8</b>	<b>12</b>	<b>23</b>
Г-функция	1		1	2	4
В-функция	1		1	2	4
Цилиндрические функции	1		6	8	15
Раздел 2. Функции с нулевыми интегралами по кругам	<b>8</b>		<b>12</b>	<b>12</b>	<b>32</b>
Примеры и простейшие свойства	2		4	4	10
Множества единственности и описание класса $V_r$	3		4	4	11
Теоремы о двух радиусах и свойство Лиувилля	3		4	4	11
Раздел 3. Функции с нулевыми интегралами по квадратам	<b>6</b>		<b>12</b>	<b>12</b>	<b>30</b>
Квадрат как множество Помпейю	2		4	4	10
Задача трёх квадратов	2		4	4	10
Локальная теорема о квадрате	2		4	4	10
Раздел 4. Приложения к вопросам анализа	<b>3</b>		<b>8</b>	<b>12</b>	<b>23</b>

Теоремы типа Мореры	1		4	6	11
Усиление теоремы Дзядыка	1		2	4	7
Аппроксимация индикаторами	1		2	2	5
<b>ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП</b>	<b>20</b>	<b>–</b>	<b>40</b>	<b>48</b>	<b>108</b>

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

#### Раздел 1

1. Аналитическое продолжение  $\Gamma$ -функции и  $V$ -функции.
2. Формула удвоения Лежандра.
3. Разложение  $1/\Gamma$  в бесконечное произведение.
4. Функции Бесселя первого рода (разложение в ряд, линейная зависимость и независимость, формулы дифференцирования, рекуррентное соотношение, дифференциальное уравнение, интеграл Бесселя, асимптотика на бесконечности, свойства нулей, полнота).

#### Раздел 2

5. Пример Чакалова.
6. Теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца.
7. Уравнение Абеля.
8. Простейшие свойства класса функций с нулевыми интегралами по кругам фиксированного радиуса.
9. Теорема единственности Джона-Смита и ее обобщения.
10. Структура класса  $V_r$ .
11. Теорема Зальцмана о двух радиусах.
12. Локальная теорема о двух радиусах.
13. Теоремы типа Лиувилля для класса функций с нулевыми интегралами по кругам.

#### Раздел 3

14. Теорема Помпейю.
15. Теорема Произволова.
16. Теорема Малюгина.
17. Теорема о квадрате для локально суммируемых функций (метод сглаживания).
18. Теорема Беренштейна-Тэйлора-Лаирда.
19. Обобщение теоремы о трёх квадратах.
20. Преобразование Радона, теорема Крамера-Вольда.
21. Задача о минимальном круге для квадрата.

#### Раздел 4

22. Усиление теоремы Мореры, теорема Зальцмана.
23. Геометрическое описание голоморфных функций.
24. Отображения, сохраняющие меру.
25. Аппроксимация индикаторами.

### 7.2. Темы докладов (рефератов)

1. Группа вращений евклидова пространства.
2. Элементы теории представлений групп.
3. Инвариантное интегрирование.

4. Преобразование Фурье радиальных функций и их обобщений.
5. Свойства функций Бесселя.
6. Свойства Г-функции и В-функции в комплексной плоскости.
7. Сферические гармоники.
8. Дробное дифференцирование и интегрирование.

### 7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике:

- радиальные функции и их обобщения (продолжение до радиальной функции, вычисление радиализации, разложение в ряд Фурье по гармоникам);
- теоремы о среднем (вычисление интегралов с помощью теорем о среднем);
- решение интегральных уравнений (решить интегральное уравнение типа Абеля).

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

### 7.4. Образец содержания экзаменационного билета:

1. Теорема о двух радиусах.
2. Вычислить интеграл  $\iint_{|z-w| \leq r} J_m(\rho) e^{im\varphi} dx dy$ .
3. Решите уравнение  $\int_0^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}} = x^n$ .

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже. Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кого набранные баллы не устраивают, сдают экзамен. Максимальное количество баллов за экзамен – 100. Оценка за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на экзамене и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 8

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-4	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	5
	Контрольные работы по практике	50
	Контрольная работа по теоретическому материалу	40
ИТОГО		100
Экзамен		100

Общий итог за семестр	100
-----------------------	-----

## Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
  - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа;
  - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
  - экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- 3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - письменные задания выполняются на компьютере;
  - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - в печатной форме увеличенным шрифтом;
  - в форме электронного документа;
- 2) для глухих и слабослышащих:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа.
- 3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 11. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 11.1. Основная литература

1. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Математический сборник. - 1995. - Т. 186, № 6. - С. 15–34.
2. Волчков В.В., Волчков Вит.В., Волčkova Н.П. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами // Математическое образование. - 2021. - № 4 (100), часть II. - С. 38–48.
3. Волчков В.В., Волчков Вит.В., Волčkova Н.П. О некоторых свойствах функций, характеризующих нулевыми интегралами. Окончание // Математическое образование. - 2022. - № 1 (101). - С. 38–47.

### 11.2. Дополнительная литература

4. Хелгасон С. Преобразование Радона / С. Хелгасон. - М. : Мир, 1983. - 150 с.
5. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. - М.: ИЛ, 1958. - 158 с.
6. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ / С. Хелгасон. - Москва: Мир, 1987 - 736 с.

## 12. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения:



01.09.2023). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.

2. **eLIBRARY.RU**: научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

3. Научная электронная библиотека «**КиберЛенинка**»: сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/>. – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

4. Электронно-библиотечная система «**Лань**»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

5. **ЭБС Юрайт**: электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://biblio-online.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ**: сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

8. **Электронный архив** ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный.

### 13. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. MicrosoftOffice (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. MicrosoftVisualStudio (лицензия программы DreamSpark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, AdobeAcrobatReader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).